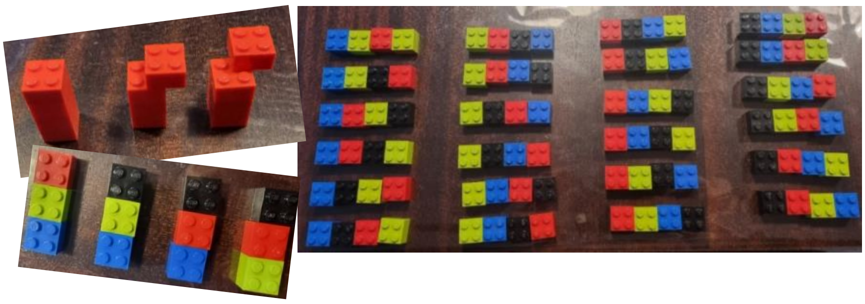
# Kombinatorik med LEGO

PROJEKT TALSTÆRK 2.0 23/24



Marie Antonsen
VESTHIMMERLANDS GYMNASIUM

# Kombinatorik med LEGO

Undervisningsmateriale - projekt talstærk 23/24

## Oversigt:

| Tidspunkt | | Indhold | Lokation |
|---|---|---|---|
| Dag 1 | kl. 08-11 | Udvælgelser med lego | Aars Skole |
| Dag 2 | kl. 08-14 | Permutationer og kombinationer<br>Lego-tårne 2x2 | Aars Skole |
| Dag 3 | kl. 08-14 | Lego-tårne 2x4<br>Plakat | Aars Skole |
| Dag 4 | kl. 08-11 | Fremvisning af plakater til gymnasieklasse<br>Gymnasieklasse viser, hvad de arbejder med for tiden i matematik | Vesthimmerlands Gymnasium: |

## Slutprodukt

En plakat, der viser, hvad hver gruppe har fundet frem til…

Mere info følger dag 4 😊

## Grupper

1. …
2. …
3. …
4. …
5. …

## Opgaveark

I får udleveret et opgaveark ad gangen. Når I er færdige med afsluttende notattagning, så får I næste ark

### *opgaver

En * ved en opgave betyder, at I ikke nødvendigvis skal løse opgaven

# Dag 1 kl. 08.00-11.00: Udvælgelser med lego

## Materialer

- 1 whiteboard
- 1 whiteboardtusch
- 1 hæfte
- 1 blyant
- 1 lommeregner (TI-30)
- 1 computer
- 4 forskellige farver legoklodser - ca. 20 stk af hver farve

## Anvendelse af materialerne

Legoklodserne er til at bygge med 😊

Whiteboardet bruges til arbejdsnoter. Tuschen skal skifte ejerperson mindst hver 10. minut.

Hæftet er til de noter, som I undervejs tænker, I kan få brug for, når I skal lave en plakat, der viser jeres resultater.

*markede opgaver er opgaver, som I ikke nødvendigvis skal lave

Lommeregneren er til besværlige udregninger. Der står, når I må bruge den.

Computeren er til afsluttende noter og billeder af jeres kreationer. Der står, når I må bruge den.

## 1: Sæt klodser i rækkefølge

1. Tag 2 klodser i to forskellige farver
    a. Byg de forskellige rækkefølger, I kan sætte klodserne i
    b. Hvor mange forskellige rækkefølger der er?
2. Tag 3 klodser i tre forskellige farver
    a. Byg de forskellige rækkefølger, I kan sætte klodserne i
    b. Hvor mange forskellige rækkefølger der er?
3. Tag 4 klodser i fire forskellige farver
    a. Byg de forskellige rækkefølger, I kan sætte klodserne i
    b. Hvor mange forskellige rækkefølger der er?
4. Tag 1 klods
    a. Hvor mange forskellige rækkefølger kan den sættes i?
5. Kan I generalisere?
    a. Hvor mange forskellige rækkefølger er der med 5 forskelligt farvede klodser?
    b. Hvor mange forskellige rækkefølger er der med 6 forskelligt farvede klodser?
    c. Hvor mange forskellige rækkefølger er der med $n$ forskelligt farvede klodser?
6. Skriv følgende på en TI-30-lommeregner.
    a. **2** & prb → **!** & enter Dvs. du beregner 2!
    b. **3** & prb → **!** & enter Dvs. du beregner 3!
    c. Prøv med andre tal - hvad tror I, at ! gør?
    d. Kan I bruge ! til at løse opgaverne fra før?
7. Skriv noter på computeren - find selv en god overskrift. Husk billeder.

## 2: Vælg nogle klodser og sæt dem i rækkefølge

Billedet nedenfor viser, på hvor mange måder man kan sættes 2 klodser i rækkefølge, når man har 3 klodser at vælge mellem. Der er 6 muligheder: $GR, GS, RS, RG, SG, SR$.

I skal gøre noget tilsvarende:

1. Tag udgangspunkt i 4 forskelligt farvede klodser og vis følgende:
   a. Hvor mange måder kan I sætte udvælge 1 klods og sætte den i rækkefølge?
   b. Hvor mange måder kan I udvælge 2 klodser og sætte dem i rækkefølge?
   c. Hvor mange måder kan I udvælge 3 klodser og sætte dem i rækkefølge?
   d. Hvor mange måder kan I udvælge 4 klodser og sætte dem i rækkefølge?
2. Lav et regnestykke, der passer til hver situation før:
   a. Hvor mange måder kan I sætte 1 klods i rækkefølge?
   b. Hvor mange måder kan I sætter 2 klodser i rækkefølge?
   c. Hvor mange måder kan I sætte 3 klodser i rækkefølge?
   d. Hvor mange måder kan I sætte 4 klodser i rækkefølge?
3. Byg nu med udgangspunkt i 3 klodser og tjek også med udregning, at I får samme antal, som I kan bygge:
   a. Hvor mange måder kan I udvælge og sætte 1 klods i rækkefølge?
   b. Hvor mange måder kan I udvælge og sætte 2 klodser i rækkefølge?
   c. Hvor mange måder kan I udvælge og sætte 3 klodser i rækkefølge?
4. *Kan I lave en formel, der kan hjælpe med udregningerne?
5. Find computeren frem og skriv noter til jeres fremtidige selv - find selv en god overskrift. Husk billeder.

## 3: Vælg nogle klodser ud og ignorer rækkefølgen

Billedet nedenfor viser, hvor mange måder man kan udvælge 2 klodser, når man har 3 forskellige klodser at vælge ud fra, og man er ligeglad med, hvilken rækkefølge, klodserne placeres i. Der er tre muligheder: $RG, SG, SR$.

1. I skal gøre noget tilsvarende… Tag udgangspunkt i 4 forskelligt farvede klodser og vis følgende
   a. Hvor mange måder kan I vælge 1 klods, når rækkefølgen ikke har betydning?
   b. Hvor mange måder kan I vælge 2 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
   c. Hvor mange måder kan I vælge 3 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
   d. Hvor mange måder kan I vælge 4 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
2. Lav et regnestykke, der passer til hver situation før:
   a. Hvor mange måder kan I vælge 1 klods, når rækkefølgen ikke har betydning?
   b. Hvor mange måder kan I vælge 2 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
   c. Hvor mange måder kan I vælge 3 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
   d. Hvor mange måder kan I vælge 4 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
3. Byg nu med udgangspunkt i 3 klodser og tjek også med udregning, at I får samme antal, som I kan bygge:
   a. Hvor mange måder kan I vælge 1 klods, når rækkefølgen ikke har betydning?
   b. Hvor mange måder kan I vælge 2 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
   c. Hvor mange måder kan I vælge 3 klodser, når rækkefølgen ikke har betydning?
4. *Kan I lave en formel, der kan hjælpe med udregningerne?
5. Find computeren frem og skriv noter til jeres fremtidige selv - find selv en god overskrift. Husk billeder.

# Dag 2 kl. 08.00-11.00: Permutationer og kombinationer

## Materialer

- 1 opgavesæt
- 1 hæfte
- 1 blyant
- 1 lommeregner (TI-30)
- 1 computer

## Anvendelse af materialerne

Hæftet er til jeres udregninger. Skriv nok til, at I senere kan huske, hvad I har tænkt og gjort.

Lommeregneren er til besværlige udregninger. Der står, når I må bruge den.

Computeren er til afsluttende noter. Der står, når I må bruge den.

## 1: Kombinationer og permutationer- formler

I formelsamlingerne på gymnasiet står følgende formler:

| | | |
|---|---|---|
| *Permutationer*<br>Antal muligheder for udvælgelse af $r$ elementer blandt $n$ elementer, når rækkefølgen har betydning | (98) | $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ |
| *Kombinationer*<br>Antal muligheder for udvælgelse af $r$ elementer blandt $n$ elementer, når rækkefølgen ikke har betydning | (99) | $K(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ |

1. Kig tilbage på jeres eksempler og udregninger fra sidste gang - har I beregnet permutationer? har I beregnet kombinationer?
2. Prøv at beregne $P(3,2)$ og $K(3,2)$ på jeres lommeregner og forklar forskellen på de to resultater.
3. Diskuter om følgende eksempler er eksempler på kombinationer eller permutationer - I må gerne tilføje bedre eksempler, hvis I har nogen 😊
    a. I en klasse på 20 elever udtages 5 elever tilfældigt til at spille 5mandsfodbold
    b. I en gruppe på 10 udvælges 2 personer tilfældigt til at få en flødebolle
    c. I en klasse på 20 elever udvælges 5 personer tilfældigt til at få et stykke slik - første person, der vælges ud, får lov til at vælge slik først, anden person er andenvælger osv.
4. Beregn antal kombinationer/permutationer fra eksemplerne ovenfor
5. Skriv noter på computeren - find selv på en passende overskrift

## 2: Opgaver…

Bemærk, at I ikke skal bruge formlerne for kombinationer og permutationer i alle opgaverne nedenfor.

### Opgave 1

Find antal kombinationer ved at liste mulighederne og ved at lave et regnestykke

a) Hvor mange forskellige måder kan Anders, Bolette og Carlo stå på?
b) Hvor mange forskellige måder kan man lave dansepar med 1 dreng og 1 pige, når der er 3 piger (Amalie, Bolette og Cecilie) og 4 drenge (Anders, Bent, Carlo og Dennis)?
c) Hvor mange forskellige måder kan man kombinere P, Q og R, når hvert bogstav skal bruges netop 1 gang?
d) * Hvor mange forskellige måder kan man kombinere P, Q og R i rækker på 3, når hvert bogstav må bruges højest 3 gange?
e) På en restaurant kan du vælge mellem 5 forretter, 4 hovedretter og 6 desserter. Hvis du skal vælge både forrret, hovedret og dessert, hvor mange forskellige menuer kan du så sammensætte?
f) * På en restaurant kan du vælge mellem 5 forretter, 4 hovedretter og 6 desserter. Hvis du skal vælge hovedret, men derudover selv må bestemme, om du også tager forret og/eller dessert, hvor mange forskellige menuer kan du så sammensætte?
g) Du kan vælge mellem 3 trøjer og 2 bukser, hvor mange forskellige sæt tøj, kan du få på?
h) Med udgangspunkt i jeres nuværende beklædning i gruppen skal I beregne antal forskellige sæt tøj, I kan tage på, hvor I ser anstændige ud. I må gerne bruge lommeregner her, hvis der er behov for det.

### Opgave 2

Bestem antal muligheder ved at regne på en lommeregner:

a) På hvor mange måder kan 8b stille et fodboldhold til en kamp, hvis kønsfordeling mv. ikke har betydning?
b) 5 meget heldige elever i 8b bliver valgt ud og får en fantastisk flot gigantisk lækker flødebolle. Hvis alle flødebollerne er ens, hvor mange måder er der så at udvælge de 5 elever?
c) 5 meget heldige elever i 8b bliver valgt ud og får en fantastisk flot gigantisk lækker flødebolle. Hvis alle flødebollerne er forskellige, og den først valgte elev må vælge først osv, hvor mange måder er der så at udvælge de 5 elever?
d) Der tages med bind for øjnene på en gang 2 sodavand op af en klasse med 24 forskellige sodavand uden at kigge. Hvor mange måder kan de to sodavand udvælges?

### Noter

Skriv afslutningsvis noter på computeren til et par af opgaverne, som I tænker er repræsentative.

## Dag 2: kl. 11.00-14.00: Lego-tårne (2x2)

### Materialer

- 1 whiteboard
- 1 whiteboardtusch
- 1 hæfte
- 1 blyant
- 1 lommeregner (TI-30)
- 1 computer
- Ca. 50 legoklodser, helst i samme farve

### Anvendelse af materialerne

Legoklodserne er til at bygge med 😊

Whiteboardet bruges til arbejdsnoter. Tuschen skal skifte ejerperson mindst hver 10. minut.

Hæftet er til de noter, som I undervejs tænker, I kan få brug for, når I skal lave en plakat, der viser jeres resultater.

Lommeregneren er til besværlige udregninger. Der står, når I må bruge den.

Computeren er til afsluttende noter og billeder af jeres kreationer. Der står, når I må bruge den.

## 1: Bygning af Lego-tårne 2x2

I skal finde ud af, hvor mange lego-tårne, der kan bygges af forskellige antal 2x2-klodser.

Hvis tårne er indbyrdes symmetriske skal de ikke tælles med flere gange. Derfor er der som vist på billedet nedenfor kun 3 mulige tårne ned 2 klodser.

Tårne fortsætter opad, men kan ikke altid stå selv.

1. Lav selv en systematisk undersøgelse af, hvor mange tårne I kan bygge med hhv. 1, 2 og 3 klodser.
2. Skriv noter på computeren - find selv på en passende overskrift

## 2: Udregninger af antal tårne 2x2

1. Forudsig på baggrund af jeres bygninger fra før en forudsigelse af, hvor mange tårne, der kan bygges med 4 klodser - argumenter for jeres resultat. I må gerne bruge lommeregner.
2. Kan I lave en formel, der fortæller hvor mange tårne der vil være baseret på det forrige antal tårne? Fx hvordan man kan beregne antal tårne med 3 klodser, når man ved hvor mange tårne, der findes med 2 klodser?
3. Forudsig vha. jeres formel, hvor mange tårne, der vil være med 5 og 6 klodser. I må gerne bruge lommeregner.
4. Skriv noter på computeren - find selv på en passende overskrift.

## 3: Regneark 2x2

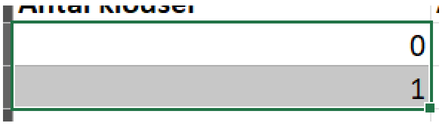
Her skal I bruge et regneark på jeres computer: google sheets eller excel.

1. I skal lave en oversigt over antal tårne med forskelligt antal klodser…
2. Skriv noter på computeren, så I får forklaret, hvad der sker i regnearket

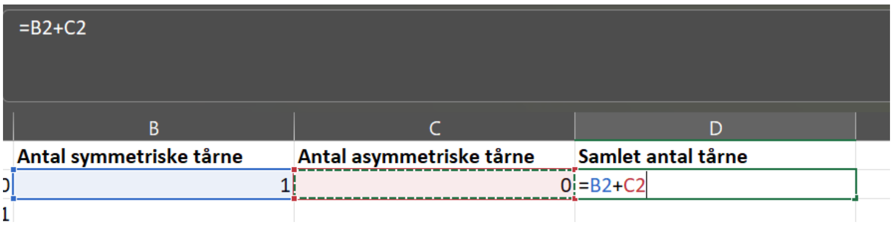
Starten på arket kan se således ud:

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Antal klodser | Antal symmetriske tårne | Antal asymmetriske tårne | Samlet antal tårne |
| 2 | 0 | 1 | 0 | |
| 3 | 1 | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| 6 | | | | |

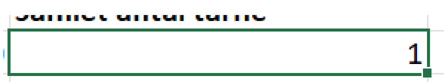
Hvis I markerer 0 og 1 i første kolonne og trækker i den lille firkant nderst, så fortsætter regnearket talrækken




Hvis I har brug for beregninger, fx af samlet antal tårne i D2, så skriv = klik på B2 skriv + og klik på C2 og tryk derefter **enter**:




En formel kan trækkes ved at trække i den lille firkant nederst:



## *4: En anden formel 2x2

1. I skal forsøge at lave en formel, der direkte kan udregne antal 2x2-lego-tårne med forskelligt antal klodser. Det skal være en formel, som ikke kræver, at man ved, hvor mange tårne, der var tidligere -
2. Tilføj formlen til jeres regneark, så I kan teste, om I får samme resultater som den tidligere formel…
3. Skriv noter på computeren.

## *5: Bygninger 2x2

En bygning skal være sammenhængende. Men til forskel fra et tårn, så må den gerne have flere klodser i hvert fald.

1. Undersøg hvor mange bygninger, I kan lave med 1, 2, 3, … klodser.
2. Skriv noter på computeren.

DISCLAIMER: jeg har intet facit, da jeg ikke har undersøgt det.

# Dag 3: kl. 08.00-11.00: Legotårne (2x4)

## Materialer

- 1 whiteboard
- 1 whiteboardtusch
- 1 hæfte
- 1 blyant
- 1 lommeregner (TI-30)
- 1 computer
- Ca. 50 legoklodser, helst i samme farve

## Anvendelse af materialerne

Legoklodserne er til at bygge med 😊

Whiteboardet bruges til arbejdsnoter. Tuschen skal skifte ejerperson mindst hver 10. minut.

Hæftet er til de noter, som I undervejs tænker, I kan få brug for, når I skal lave en plakat, der viser jeres resultater.

Lommeregneren er til besværlige udregninger. Der står, når I må bruge den.

Computeren er til afsluttende noter og billeder af jeres kreationer. Der står, når I må bruge den.

## 1: Tårne af 2x4-klodser

I skal finde ud af, hvor mange lego-tårne, der kan bygges af forskellige antal 2x4-klodser.

I skal ligesom ved 2x2-klodserne ikke tælle indbyrdes symmetriske tårne med.

Tårne fortsætter opad, men kan ikke altid stå selv.

1. Lav selv en systematisk undersøgelse af, hvor mange tårne I kan bygge med hhv. 1 og 2 klodser.
2. Overvej, hvordan tårnene kan fortsætte, og hvordan I kan beregne antal tårne med 3 klodser - der er flere end I har klodser til at bygge i dette lokale. Brug gerne lommeregner til at regne.
3. Skriv noter på computeren - find selv på en passende overskrift. Husk billeder.

## 2: 2x4-tårne i regneark

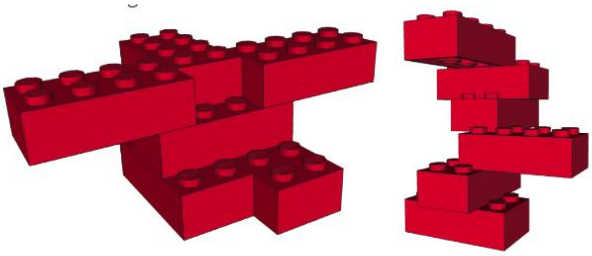
1. Lav et regneark i stil med regnearket for 2x2-tårne. I skal gerne ramme 102981504 med 6 klodser.
2. Skriv noter på computeren. Husk at forklare, hvordan regnearket fungerer.

## *3: Formel

1. Prøv at lave en formel, der kan udregne antal 2x4-lego-tårne med forskelligt antal klodser. Det skal være en formel, som ikke kræver, at man ved, hvor mange tårne, der var tidligere.
2. Tilføj formlen til jeres regneark, så I kan teste, om I får samme resultater som den tidligere formel…
3. Skriv noter på computeren.

## *4: Bygninger med 2x4 klodser

En bygning skal være sammenhængende.



1. Undersøg hvor mange bygninger, I kan lave med 1, 2, og måske 3 klodser.

LEGO oplyser selv, at der er 915.103.765 bygninger med 6 klodser.

## Dag 3: kl. 11.00-14.00: Plakatproduktion

### Materialer

- 1 blyant
- Post-its
- 1 computer

### Anvendelse af materialerne

Post-its er til ide-generering.

Computeren til at lave posteren på. Der står, når I må finde den frem.

### Produkt-aflevering:

Kl. 13.50 skal I sende jeres plakater til MAIL-ADRESSE som en pdf-fil eller aflevere på USB

## Plakat-optakt og -produktion

### Intro til plakatopgaven

I skal lave en plakat på én A1-side, som I kan bruge til at præsentere jeres resultater.

Plakaten skal kunne læses og forståes af gymnasieeleverne, som giver jer feedback i morgen.

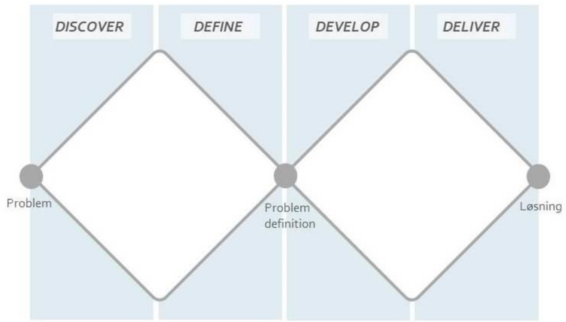
Jeres plakat skal indeholde tal og udregninger, da I arbejder med matematik.

Der skal være forklaringer og tekst.

Der skal også være billeder.

### Plan for arbejdet

En designcyklus (hvor man gerne må vende tilbage, hvis noget viser sig ikke at være realistisk):




**Fase 1: discover (opdag problemet)**

Undersøg bredt, hvad I kan have med på plakaten.

Del i gruppen jeres tanker / pointer. Vi starter med 2 minutter, hvor I hver især sidder og skriver ideer/tanker på et stykke papir. Del derefter ideer med hinanden.

Det største krav nu er, at I skal være åbne overfor hinandens ideer 😊

Lav postits med ideer - en ide pr. postit

Grupper derefter ideerne på A3 og tegn pile osv (dvs. lav et mindmap)

**Fase 2: define (definer problemet)**

Vurder hvilke ideer fra fase 1, der er værd at arbejde videre med.

Stil mindst et "hvordan kan vi…"-spørgsmål til jeres ideer (hvordan kan vi illustrere dette? hvordan formidler vi hvad dette er? Er der andre gode eksempler? osv).

Alt dette skulle gerne føre til, at I får valgt noget ud, som I kan bruge til jeres plakat.

### Fælles intro til en god plakat

PP og eksempler

### Retur til designet

**Fase 3: develop** (udvikl en løsning)

Udforsk jeres ideer yderligere.

Find på tekster og billeder

Husk løbende at overveje, om I holder jer indenfor jeres ide og får formidlet, hvad I har lavet

**Fase 4: deliver** (aflever løsning)

Lav plakaten.

Overvej farver, billeder osv.

Tjek, at jeres plakat stadig lever op til det, I gerne ville

# FACIT

På de følgende sider følger facit og forklaringer til udvalgte opgaver

# Resultater til første del af materialet: udvælgelser

## Resultater til rækkefølger (permutationer) af alle

2 klodser:

$2! = 2$

3 klodser:

$3! = 6$

4 klodser

$4! = 24$

## Resultater til rækkefølger (permutationer) af nogle

2 farver: 1 udvalgt

$\frac{2!}{(2-1)!} = 2$

2 farver: 2 udvalgt

Mangler billede

(SR, RS)

$\frac{2!}{(2-0)!} = 2$

3 farver: 1 udvalgt

$\frac{3!}{(3-1)!} = 3$

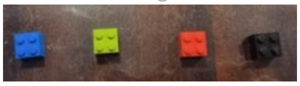
3 farver: 2 udvalgt:

$\frac{3!}{(3-2)!} = 6$

3 farver: 3 udvalgt

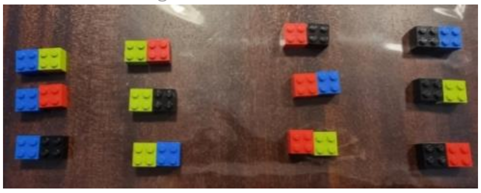
$\frac{3!}{(3-3)!} = 6$

4 farver: 1 udvalgt



$\frac{4!}{(4-1)!} = 4$

4 farver: 2 udvalgt:

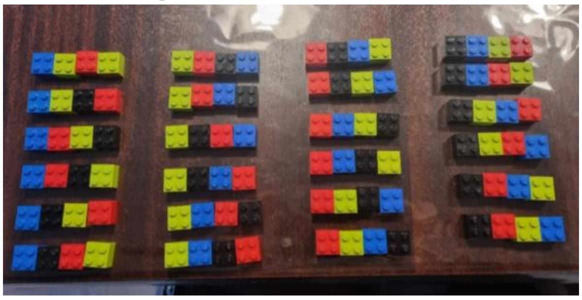


$\frac{4!}{(4-2)!} = 12$

4 farver: 3 udvalgt

$\frac{4!}{(4-3)!} = 24$

4 farver: 4 udvalgt



$$\frac{4!}{(4-4)!} = 24$$

Resultater til udvælgelse (kombinationer) af nogle

2 farver: 1 udvalgt:

$$\frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = 2$$

3 farver: 1 udvalgt

$$\frac{3!}{1! \cdot (3-1)!} = 3$$

3 farver: 2 udvalgt:

$$\frac{3!}{2! \cdot (3-2)!} = 3$$

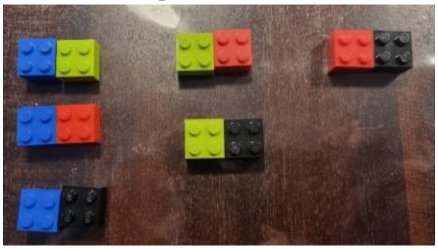
3 farver: 3 udvalgt

$$\frac{3!}{3! \cdot (3-3)!} = 1$$

4 farver: 1 udvalgt

$\frac{4!}{1!\cdot(4-1)!} = 4$

4 farver: 2 udvalgt:



$\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = 6$

4 farver: 3 udvalgt:

$\frac{4!}{3!\cdot(4-3)!} = 4$

4 farver: 4 udvalgt:

$\frac{4!}{4!\cdot(4-4)!} = 1$

## Resultater til anden del: kombinatorik-opgaver

### 1: Formler

6. Permutationer i de to første dele og kombinationer i tredje del.
7. $P(3,2) = 6$ og $K(3,2) = 3$. Permutationer er til udvælgelser, hvor rækkefølgen har beytdnng. Kombinationer er til udvælgelser, hvor rækkefølgen ikke har betydning.
8. Diskuter om følgende eksempler er eksempler på kombinationer eller permutationer - I må gerne tilføje bedre eksempler, hvis I har nogen 😊
   a. Kombinationer.
   b. Kombinationer.
   c. Permutationer.
9. Beregn antal kombinationer/permutationer fra eksemplerne ovenfor. I må gerne benytte lommeregner.
   a. $K(20,5) = 15504$
   b. $K(10,2) = 45$
   c. $P(20,5) = 1860480$
10. Skriv noter på computeren - find selv på en passende overskrift

## 2: Opgaver

### Opgave 1

a) 6
b) 12
c) 6
d) 27
e) 120
f) 168
g) 6

### Opgave 2

e) 705432
f) 26334
g) 3160080
h) 276

## Resultater til tredje del: 2x2 tårne

### 1 klods

1 symmetrisk

**1 I ALT**

### 2 klodser

1 symmetrisk & 2 asymmetriske baseret på den symmetriske fra før

**3 I ALT**

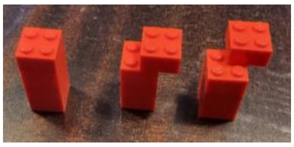
### 3 klodser

1 symmetrisk & 2 asymmetriske baseret på symmetrisk fra før & 18 fortsættelser på asymmetriske fra før (9 pr asymmetrisk fra før)

$1 + 2 + 2 \cdot 9 = 21$

**21 i ALT**

### 4 klodser



1 symmetrisk & 2 asymmetriske baseret på symmetrisk fra før & …

9 muligheder for hver af de 20 asymmetriske fra før (disse er ikke bygget)

**I ALT:** $\mathbf{1 + 2 + 9 \cdot 20 = 183}$

## Rekursive formler egnet til regneark

En systematisering af resultaterne ovenfor. Det er netop 1 symmetrisk med $n$ klodser. Når der tilsættes endnu en klods, så er der to asymmetriske muligheder for det symmetriske tårn fra før. Derudover har hvert asymmetriske tårn 9 mulige fortsættelser, hvor ingen er symmetriske med hinanden.

De ni mulige fortsættelser kan ses her:

Dette kan samles i en tabel som nedenstående:

| Antal klodser | Antal symmetriske | Antal asymmetriske | Samlet antal |
|---|---|---|---|
| 1 | $s_1 = 1$ | $a_1 = 0$ | $s_1 + a_1 = 1 + 0$ |
| 2 | $s_2 = s_1 = 1$ | $a_2 = s_1 \cdot 2 + a_1 \cdot 9 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 9 = 2$ | $s_2 + a_2 = 1 + 2 = 3$ |
| 3 | $s_3 = s_2 = 1$ | $a_3 = s_2 \cdot 2 + a_2 \cdot 9 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 9 = 20$ | $s_3 + a_3 = 1 + 20 = 21$ |
| 4 | $s_4 = s_3 = 1$ | $a_4 = s_3 \cdot 2 + a_2 \cdot 9 = 1 \cdot 2 + 20 \cdot 9 = 182$ | $s_4 + a_4 = 1 + 182 = 183$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | $s_5 = s_4 = 1$ | $a_5 = s_4 \cdot 2 + a_4 \cdot 9 = 1 \cdot 2 + 182 \cdot 9 = 1640$ | $s_5 + a_5 = 1 + 1640 = 1641$ |
| 6 | $s_6 = s_5 = 1$ | $a_6 = s_5 \cdot 2 + a_5 \cdot 9 = 1 \cdot 2 + 1640 \cdot 9 = = 14762$ | $s_6 + a_6 = 1 + 14762 = 14763$ |
| 7 | $s_7 = s_6 = 1$ | $a_7 = s_6 \cdot 2 + a_6 \cdot 9 = 1 \cdot 2 + 14762 \cdot 3 = 44288$ | $s_7 + a_7 = 1 + 44288 = 44289$ |

**Kommenterede [MA1]:** Regn efter!

Osv.

Formlerne bliver til:

$s_1 = 1$ og $a_1 = 0$

$s_n = s_1$ for $n > 1$

$a_n = s_{n-1} \cdot 2 + a_{n-1} \cdot 9$ for $n > 1$

## En ikke-rekursiv formel til direkte beregning

Det vil være en god ide at starte med en systematisering af, hvordan man kan fortsætte et tårn. Billedet nedenfor viser de 9 mulige fortsættelser på en klods. Der vil efterfølgende skulle korrigeres for drejningssymmetriske tårne.

Med 2 klodser er der 1 symmetriske tårn, de resterende 8 asymmetriske tårne er fire og fire indbyrdes drejningssymmetriske, så en beregning af antal tårne med 2 klodser kan være: $t_2 = 1 - \frac{9-1}{4} = 3$

Når man fx vil finde antal mulige forskellige tårne med 3 klodser, kan man forestille sig, at man tager de 9 muligheder og sætter på hver mulighed de 9 forskellige fortsættelser på, hvorefter man korrigerer for antal drejningssymmetriske tårne. Der vil være 1 symmetrisk tårn. Der er i alt $9^2 =$

81 tårne. For de resterende $80$ tårne kan man med passende overvejelser indse, at disse også i grupper på fire er indbyrdes drejningssymmetriske. Dvs. $t_3 = 1 + \frac{9^2-1}{4} = 21$ tårne.

Tilsvarende med 4 klodser vil der være de $81$ tårne med 3 klodser, som hver kan få sat en af de mulige fortsættelser på. Dermed er der $9^3 = 729$, hvor 1 er symmetrisk. Indbyrdes vil de igen i grupper på fire være drejningssymmetriske. Så $t_4 = 1 + \frac{9^3-1}{4} = 183$

På denne måde kan man fortsætte:

$$t_n = 1 + \frac{9^{n-1} - 1}{4}, \qquad n \geq 1$$

## Resultater til fjerde del: 2x4-tårne og-bygninger

Formlerne til antal tårne med 2x4 klodser og information om antal bygninger med $n$ klodser er fra Søren Eilers: *A LEGO counting problem* (https://web.math.ku.dk/~eilers/lego.html ) og *Vidste du ... at der er 915103765 muligheder?* (https://www.math.ku.dk/uddannelser/laes/vidstedu/lego/ ).

### Tårne

Der er 46 mulige måder at lægge en 2x4-klods ovenpå en anden 2x4-klods. Alle måder kan ses på billedet nedenfor. Der er to symmetriske tårne, mens de resterende 44 er drejningssymmmetrisk ens. Dermed er $t_2 = 2 + \frac{46-2}{2} = 24$.

Når der laves et tårn med tre klodser, er der for hvert af de 46 tårne mulighed for at placere næste brik på 46 måder. Så der er $46^2$ mulige tårne. $2^2$ af disse er symmetriske, da hvert symmetrisk tårn fra tidligere giver anledning til 2 nye symmetriske tårne. De resterende tårne vil være parvist ens. Så $t_3 = 2^2 + \frac{46^2-2^2}{2} = 1060$.

På samme måde kan man argumentere for, at der med fire klodser er $46^3$ mulige tårne, hvoraf $2^3$ er symmetriske, mens de resterende tårne er parvist ens. Dermed er $t_4 = 2^3 + \frac{46^3-2^3}{2} = 48672$

Så en formel for er:

$$t_n = 2^{n-1} + \frac{46^{n-1} - 2^{n-1}}{2}$$

Man kan også argumentere for rekursive formler. Med 1 klods er der 1 symmetriske og 0 asymmetriske tårne. Dvs. $t_1 = s_1 + a_1 = 1 + 0 = 1$.

Med 2 klodser kommer der det dobbelte antal symmetriske tårne af, hvad der var tidligere, nemlig 2. Men der kommer også 22 asymmetriske tårne for det ene symmetriske tårn, da de øvrige 44 fortsættelser parvist vil føre til ens tårne. Så $t_2 = s_2 + a_2 = 2 \cdot s_1 + 22 \cdot s_1 = 2 \cdot 1 + 22 \cdot 1 = 24$

Med tre klodser kommer det dobbelte antal symmetriske tårne af hvad der var tidligere, nemlig 4. Der kommer derudover 22 asymmetriske tårne for hvert af de symmetriske tårne fra før, da de øvrige 44 fortsættelser også her parvist vil føre til ens tårne. De asymmetriske tårne fra tidligere afstedkommer hver 46 nye tårne, da de allerede ikke er drejningssymmetriske, så kan de ikke blive det ved at tilføje flere klodser. Dermed er $t_3 = s_3 + a_3 = 2 \cdot s_2 + 22 \cdot s_2 + 46 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 + 22 \cdot 2 + 46 \cdot 22 = 1060$.

Med et tilsvarende argument kan man nå frem til at $t_4 = s_4 + a_4 = 2 \cdot s_3 + 22 \cdot s_3 + 46 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 + 22 \cdot 4 + 46 \cdot 1056 = 48672$.

De generelle rekursive formler er dermed:

$s_1 = 1$

$a_1 = 0$

$s_n = 2 \cdot s_{n-1}, \quad n > 1$

$a_n = 22 \cdot s_{n-1} + 46 \cdot a_{n-1}, \quad n > 1$

### Bygninger

Hvis man vil bestemme antal bygninger med $n$ 2x4-klodser er det meget mere kompliceret. Ideen i udregningerne er, at man for $n$ klodser udregner antal muligheder for hhv $0, 1, 2, \dots, n$ klodser og adderer. Antal bygninger med $n$ klodser er netop antal tårne med $n$ klodser.

Der er skrevet computerprogrammer til at løse opgaven. Jo flere klodser der er, jo mere tidskrævende bliver det - det kan tage år. Dette kan man afslutningsvis fortælle eleverne.

| | | |
|---|---|---|
| $b_1 = 1$ | | |
| $b_2 = 24$ | | |
| $b_3 = 1560$ | | |
| $b_4 = 119580$ | | E 2004 |
| $b_5 = 10116403$ | Sekunder | E 2004 |
| $b_6 = 915103765$ | Minutter | E 2004 |
| $b_7 = 85747377755$ | Timer | Abrahamsen-E 2005 |
| $b_8 = 8274075616387$ | Uger | Abrahamsen-E 2005 |
| $b_9 = 816630819554486$ | Måneder | Nilsson 2014 |
| $b_{10} = 82052796578652749$ | År | Simon 2018 |
| $b_{11} = ?$ | Århundreder? | |

## Plakat

### Guidelines:

Et forslag til guidelines til en god plakat:

- Formatet er A1
  - Overskrift: 50+
  - Tekst: 20
- Selvforklarende
- Målgruppe: førsteårselever i gymnasiet
- Visuelt tiltalende:
  - Flow: læseretning øverst til venstre mod nederst til højre
  - Hierarki: det vigtigste øverst og størst
  - Grid: et skelet fx i form af tre spalter og nok "white space"
  - Balance: ikke overvægt i den ene side
  - Farver: 2-3 farver, som matcher - benyt evt. Adobes color wheel: https://color.adobe.com/create/color-wheel/
  - Illustrationer: benyt relevante billeder i en høj nok opløsning

### Bedømmelse og feedback

Gymnasieeleverne giver feedback på følgende måde. I grupper cirkulerer de ved plakaterne.

Ved den første plakat, de besøger, skal de vurdere, om plakaten er forståelig: Kan tankegangen i det, der står på plakaten, følges? Mindst en rosende ting skrives på grønne post-its. En ting pr. post-it. Et opklarende spørgsmål skrives på en rød post-it.

Ved anden plakat skal de vurdere, om plakaten indeholder nok matematik: Er der formler? Er der eksempler? Er der illustrationer/billeder? På grønne post-its noteres mindst en rosende ting. En ting pr. post-it. Et opklarende spørgsmål skrives på en rød post-it.

Ved tredje plakat, der besøges, skal de vurdere om plakatens layout er i orden: Er der et synligt gitter (grid)? Er der et godt flow? Er der valgt gode, matchende farver? Er plakaten balanceret? Er teksten læselig? Er billederne læselige? Igen noteres der mindst en rosende ting på en grøn post-it. En ting pr. post-it. Et forslag til en forbedring noteres på en rød post-it.

Herefter fortsættes der forfra, indtil alle har besøgt alle plakater.

Herefter læser folkeskoleeleverne feedbacken og taler om den i deres grupper. De udvælger 2 spørgsmål, som de svarer på efterfølgende overfor gymnasieeleverne og lærerne på tur.